제3장. 상대성이론 - 내용정리 2

시간-공간 2차원으로 줄여서 4차원 이해하기

녹색아카데미에서 책『**장회익의 자연철학 강의**』의 이해를 도울 대담 영상을 준비하였습니다. 장회익 선생님과 '자연철학'에 대해 이야기를 나누는 이 영상은 2020년 경희대학교 교양강좌 [철학자를 위한 물리학] 수강생들의 공부를 돕고자 제작되었습니다. 또한 이 동영상이 장회익선생님의 책에 관심을 가진 분들 누구에게나 좋은 참고자료가 되리라 기대합니다. 더 자세한 내용은 책과 녹색아카데미 웹사이트를 참고해주세요.

2021년 3월 2일. 녹색아카데미

"장회익의 자연철학 이야기" 4-3편[1]은 『장회익의 자연철학 강의』 중 '제3장 소를 보다: 상대성이론' 중 내용정리 부분을 다루면서 시간과 공간이 대등한 두 개의 축을 이루는 2차원 평면 공간을 가지고 시공간 4차원 이해를 시도합니다. 다룬 질문은 다음과 같은 것들입니다.

1. 시간과 공간이 2차원을 이룬다는 것에 대해서

1.1. 벽에 걸쳐진 한 사다리에서 본 다른 사다리의 기울기?

1.2. 2차원 시간-공간?

1.3. 상수는 단위를 맞춰주기 위한 것?

- 시공간 2차원에서 시간은 복소수 2차원 중 허수축에 대응

1.4. 시공간을 4차원으로 보기로 하고 복소수 공간을 채택해서 시간을 허수축에 놓으니 잘 맞더라?

1.5. 복소수 공간의 시공간 4차원은 '실재'인가?

1.6. 도리어 시공간 4차원 이론으로 복소수의 실재성이 드러난 것?

2. 4차원 시공간에서의 상대 속도 문제

2.1. 시간과 공간이 2차원을 이룰 때 상대방의 속도는 어떻게 보이는가?

2.2. 상수 c의 값은 어떻게 찾아내나?

2.3. 이론이 먼저 나오고 상수값이 나중에 밝혀진 역사적 사례가 있나?

바로가기 링크

자연철학 세미나 게시판
유튜브 대담영상 녹취록 목록
녹취록 전체 목록 : 대담영상 & 세미나
녹색아카데미 유튜브 채널
자연철학세미나 녹취록 목록

[1] ※대담 참석 : 장회익선생님, 최우석, 황승미. ※대담 녹화 : 2020년 4월. ※녹취록 작성 : 2021년 3월 2일.
※명조체, 구분점(·) 부분 : 장회익선생님 말씀, 〈최〉 : 최우석 질문, 〈황〉 : 황승미 질문, ( ) 안은 녹취자가 넣은 내용.

제 3 장. 소를 보다: 상대성이론 - 내용정리 2

시간-공간 2차원으로 줄여서 4차원 이해하기

1. 시간과 공간이 2차원을 이룬다는 것에 대해서

<최> 2차원에서 어떻게 시간-공간 차원을 이루는가 살펴보았다. 그것을 위해서 삼각함수의 뺄셈정리를 다룬 부분이 있다.

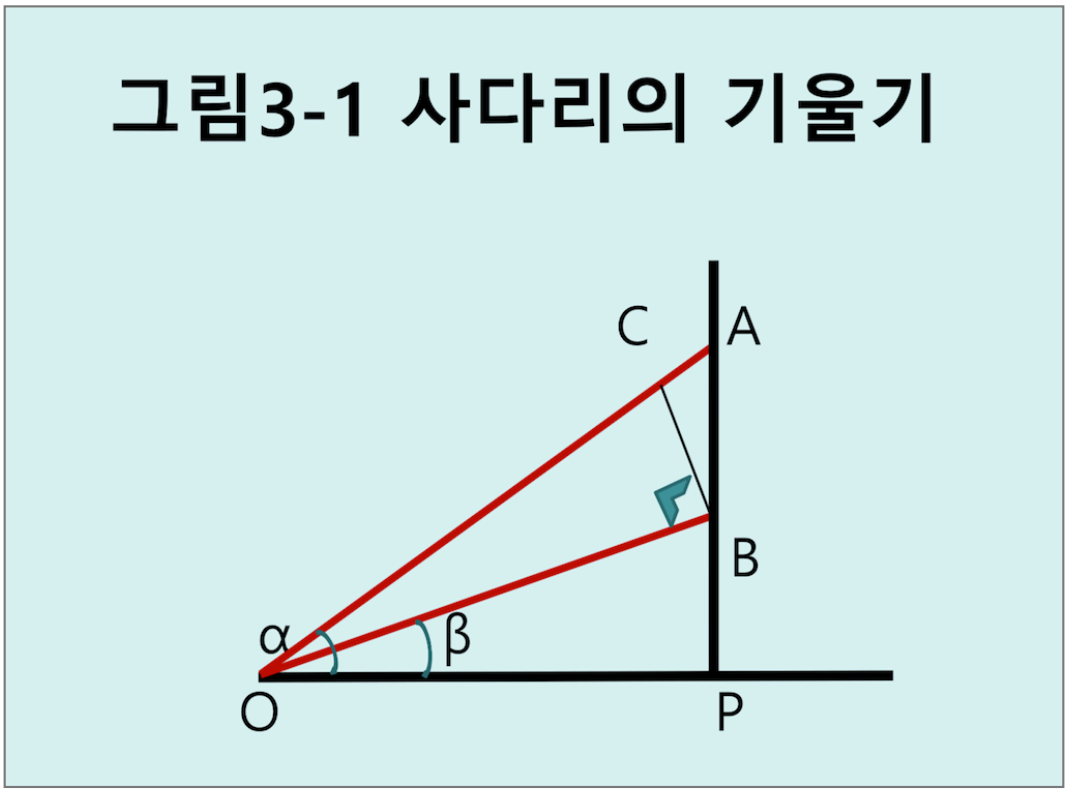
- 그런데 그걸 여기서 우리가 길게 할 필요는 없다. 중고등학교 수학에서도 나오니까, 이 정도만 얘기를 하면 된다. 이게 왜 이렇게 되는가하는 것은 지금 여기서 길게 얘기하기에는 적절치 않고, 이런 것이 있다하는 것만 확인하고 넘어가면 된다.

[슬라이드 3] tan 가법정리

- 탄젠트(tan) 가법정리를 우리가 직접 곧 활용하기 때문에 이 내용을 떠올린다는 의미에서 적어본 것이다. 사인함수와 코사인함수의 뺄셈정리는 쉽게 증명이 된다. 탄젠트의 뺄셈정리도 사인과 코사인의 비라는 탄젠트의 정의에 의해서 나온다. 고등학교 교과서를 봐도 되고, 우리 책의 부록에 자세히 나오니까 잊어버린 사람은 확인해보면 되겠다.

1.1. 벽에 걸쳐진 한 사다리에서 본 다른 사다리의 기울기?

<최> 벽에 두 개의 사다리를 놓았을 때, 아래쪽 사다리를 기준으로 위쪽 사다리를 보는 것에 대해서 책에서 말씀을 해주셨다.



[슬라이드 4] 사다리의 기울기

- 이 그림은, OP가 땅이고 AP가 단단한 벽이라고 생각하면 된다. 여기서 빨간색 사선은 사다리다. OB라는 사다리는 β라는 기울기로 걸려 있고, OA 사다리는 좀 더 급하게 α라는 기울기로 걸려 있다. 이 두 사다리의 기울기가 다르다. 기울기는 α, β처럼 각으로 나타낼 수도 있지만, 그 각에 대한 밑변과 높이의 비가 얼마나 되느냐로도 나타낼 수 있다. 즉 tan α와 tan β가 이 두 사다리의 기울기를 나타낸다. tan α는 $\frac{AP}{OP}$, tan β는 $\frac{BP}{OP}$이다.

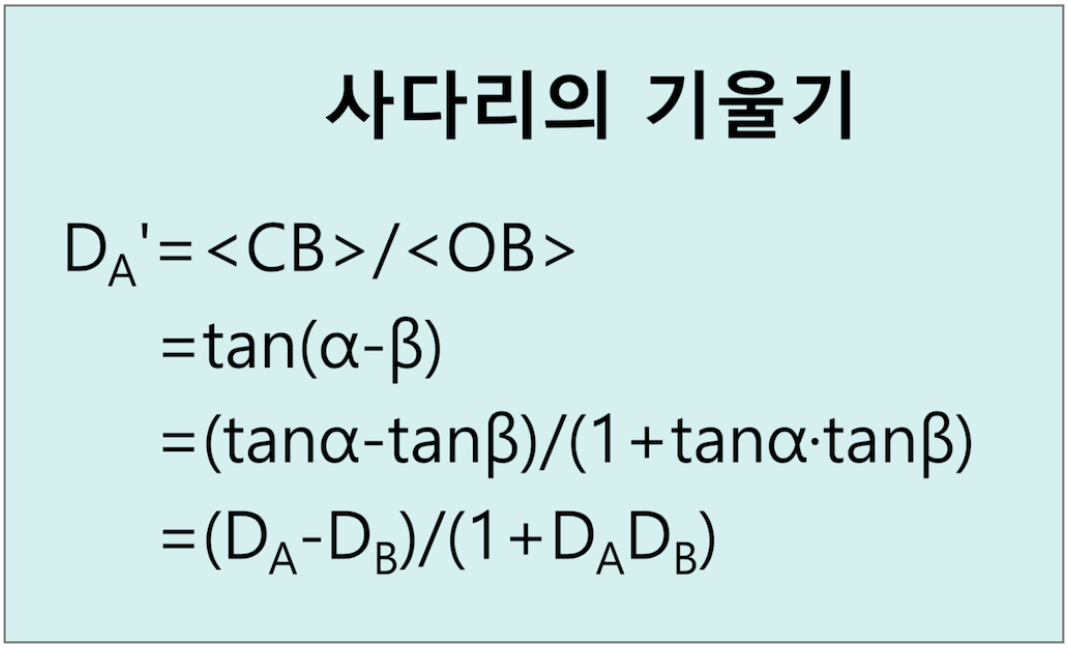
<최> 원래 탄젠트가 기울기를 나타내기 위해서 만들어진 것인가?

- 뭐, 결국은 그렇게 된 것이라고 봐도 된다. 두 사다리의 기울기가 tan α와 tan β라는 데에는 아무 문제가 없다. 그런데 여기서 재미난 문제는, OB를 땅이라고 가정하는 경우다. OP나 OB나 2차원 평면에서는 대등하다. 실제로 물리적인 세계에서는 중력이 있다고 해서 OP를 바닥이라고 하지만, 시공간 안에서는 중력은 빼놓고 본다. 그러니까 OP와 OB는 대등한데 반드시 OP를 기준으로 해야할 필요가 있느냐하는 것이다.

- OB를 기준으로 기울기를 얘기하면, OB 자체의 기울기는 0이다. 오히려 땅 OP가 $-\beta$만큼 아래쪽으로 기울었다고 볼 수 있다. 그런데 관심은 OB를 기준으로 했을 때 OA라는 사다리의 기울기가 얼마냐 하는 것이다. 그러면 어떻게 해야할까?

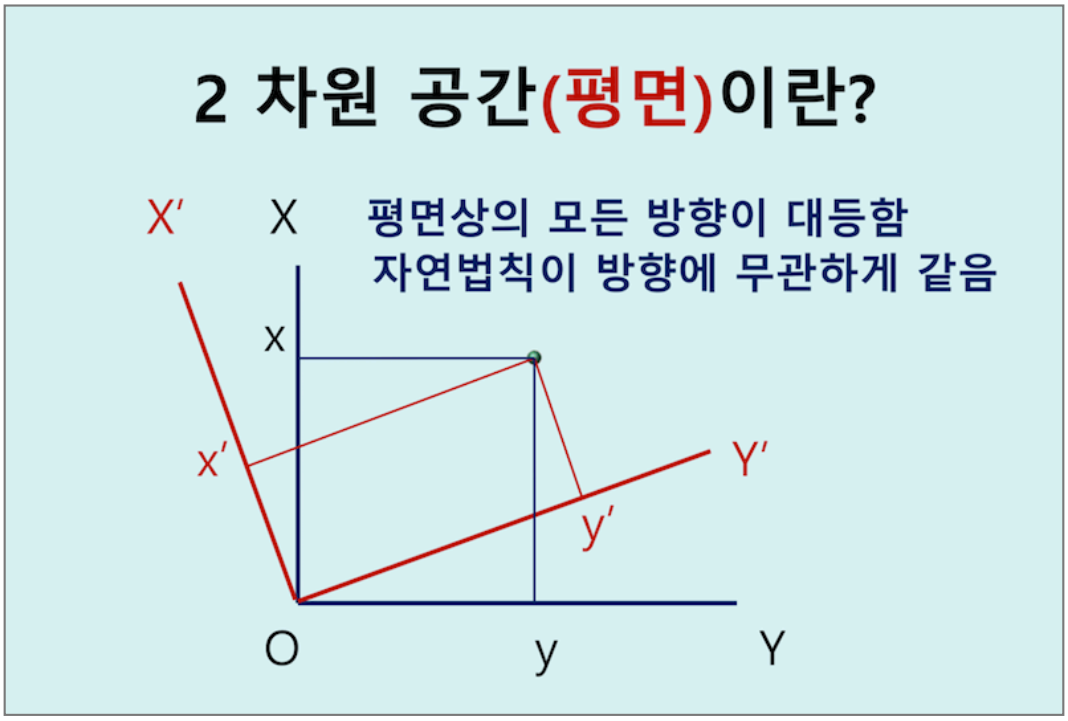
<최> 각으로 보면 α-β각이다.

- 각 $\alpha-\beta$의 탄젠트 값이 OB에 대한 OA의 기울기이다. 그래서 점 B에서 OA로 수직으로 선을 올리면 점 C에서 만나고, tan $(\alpha-\beta)$는 $\frac{CB}{OB}$가 된다. 너무 당연한 얘기다.
- 그런데 조금 전에 우리가 탄젠트의 뺄셈정리를 확인했다. 우리가 알고 있는 tan α와 tan β로, tan $(\alpha-\beta)$가 어떻게 표시되는지, 그 관계가 탄젠트 뺄셈정리에 나와 있다. 땅 OP에 대한 사다리 OA와 OB 각각의 기울기 값이 있으니까, 그 값을 알면 OB에 대한 OA의 상대적인 기울기 D_A'를 알 수 있다는 것이다. 이 공식을 알면 아주 편리하게 D_A'를 구할 수 있다(슬라이드 5).
- 상대속도를 나타낼 때도 이것과 똑같이 하면 된다. 그래서 4차원일 때, 말하자면 거리와 시간이 4차원으로서 서로 대등할 때 바로 이 방법(슬라이드 5)으로 상대속도를 구할 수 있다(슬라이드 6).



[슬라이드 5] 사다리의 기울기 계산

1.2. 2차원 시간-공간?

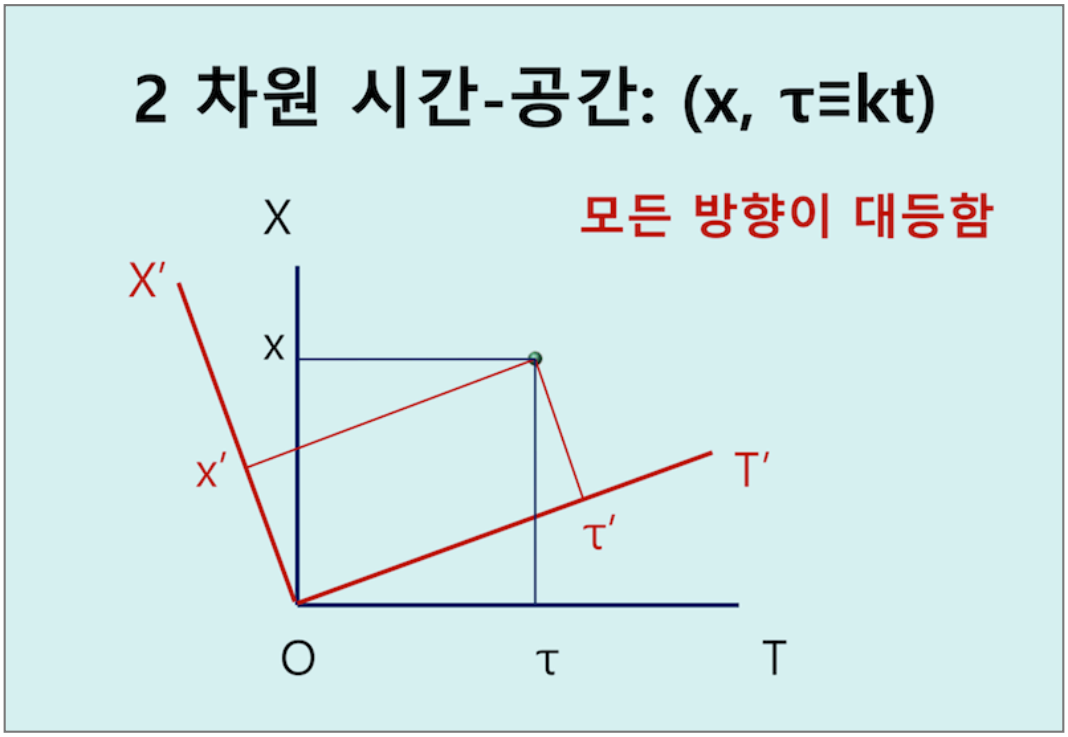


[슬라이드 6] 2차원 공간(평면)이란?

<최> 슬라이드 6에서, 가로축과 세로축이 모두 길이(공간 단위)인 우리가 흔히 아는 2차원 공간인데, 시간도 공간 차원으로 나타낼 수 있다는 그림인 것 같다.

- 이 내용이 핵심이다. 시간과 공간은 사실은 근본적으로 다르다는 것은 인정해야지. 그런데도 불구하고 재미있는 것은, 시간에다가 i를 곱하면 (대등해질 수 있다). 앞에서 언급했지만 가우스 평면에는 실수축과 허수축이 있다. 그런데 이 두 축은 i를 하나 곱한 차이가 있다.
- 실수축의 길이를 a라고 하고 세로 허수축을 b라고 할 때는, 그냥 b가 아니라 ib가 된다. 그래서 ib를 그냥 실수와 같이 취급하자는 것이다. 예를 들어서 ib를 β로 놔보자. 그러면 가로 실수축은 a가 되고 세로 허수축은 β가 되는데, 여기서 β를 실수처럼 취급하면 a와 β가 완전히 대등한 두 개의 축이 된다.
- 이런 의미에서 보면 2차원이 되는데, a와 b는 정확히 2차원은 아니다. i가 붙어 있기 때문이다. 그래서 그 i가 붙은 것까지 감안해서 β로 보면 완전히 2차원이라고 할 수 있다.
- 시간축에는 i가 들어있다. 슬라이드 7에서 k 속에는 i가 들어있다. 그래서 i가 들어있는 어떤 상수를 곱해서 τ(타우)라고 놓으면 x와 τ 둘 사이는 대등하다. 그래서 **X**와 **T**(타우 대문자) 이 공간은 완전히 2차원이다.

- t와 x 사이에는 k만큼의 차이가 있다. 그 차이가 뭐냐면, 우리가 시간과 공간이 다르다하는 것이 k 속에 들어있고, t에 적당한 k값을 집어넣어서 $\tau \equiv kt$ 이렇게 정의할 때에 (≡은 '정의한다'는 의미다) x와 τ는 대등하다, 이렇게 시간과 공간 관계를 볼 수 있다, 그렇게 보자, 하는 입장이다.



[슬라이드 7] 2차원 시간-공간: $(x, \tau \equiv kt)$

- 가로축은 여전히 시간축이다. 왜냐하면 τ를 알면, 즉 k는 보편상수니까 $\tau \equiv kt$의 관계가 저절로 나오니까 가로축은 시간축으로 보고 세로축은 공간축이다. 그러면 이러한 의미에서 이 둘은(**X**와 **T**) 2차원 시공간을 이룬다는 얘기가 된다.

1.3. 상수는 단위를 맞춰주기 위한 것?

<최> 이 문제를 제가 조금 생각해보았다. 단위를 맞춘다는 것, 그러니까 다 거리의 단위 혹은 길이의 단위로 맞추려고 할 때, 시간에 속도를 곱하면 거리가 나온다. 속도가 단위시간 동안 간 거리(거리/시간)니까, 속도에 시간을 곱하면 분자와 분모의 시간 단위가 소거되고 거리만 남는다.

그러니까 속도를 곱해주면 시간의 단위가 거리의 단위로 바뀌어지는데, 그때 상수를 곱해서 그 단위를 맞춰 준다는 것까지는 알겠다. 그런데, 약간 벗어나는 질문인데, 물리학에 보면 상수 얘기가 많이 나온다. 상수가 곱해진다, 상수가 앞에 붙어 다닌다하는 얘기가 많이 나오는데, 상수라는 것은 이 경우처럼 단위를 맞춰주기 위한 필수불가결한 것인가?

- 그런 성격이 많다. 지금 이 경우가 그렇다. 그럼 여기서 k가 뭐냐. 두 가지 성격을 나타낸다. 하나는 허수의 의미이다. t는 허수축에 해당하기 때문에 k에 i가 반드시 들어가야 한다. 다시 말해서 시간축은 수학적으로 볼 때 실수축이 아니라 허수축이다.
- 허수축이 시간에 해당한다는 것이, 또 하나의 놀라운 발견이다. 그러니까 실수축이 공간상의 거리를 나타낸다 그러면, 수학적으로 맞춰보니까 허수축이 바로 시간축에 해당하더라는 것이다. 그래서 수학적으로 표시하려면 i를 하나 곱해줘야 한다. k 속에는 i가 들어가야 한다.
- 그 다음에 또 한가지는, 지금 지적해주었듯이 우리가 처음부터 시간의 단위는 초(second)같은 것으로 임의로 정했고, 또 공간은 미터같은 것으로 따로 정했다. 서로 관계가 전혀 없는데 우리가 임의로 이미 만들어놓은 것을 가지고 있다.
- 그런데 이제는 이게(슬라이드 7의 그림)이 2차원이라면, 가로축과 세로축의 단위가 서로 맞아야 한다. 그래서 예를 들어서 거리의 단위로 맞추려고 할 때 t에 어떤 상수 하나를 곱해야 거리의 단위가 같아질까? 그 상수를 c라고 두자. 그래서 k는 ic가 된다.
- c는 단위를 맞춰주기 위해서 넣은 것이고, i는 허수축에 대응한다는 의미이다. 그래서 ic를 k라고 놓으면 완전히 4차원이 된다. 그래서 τ를 ict로 놓으면, 이때 τ는 x, y, z와 완전히 대등해진다. 시간 t 자체는 ic만큼 차이가 있다.

시공간 2차원에서 시간은 복소수 2차원 중 허수축에 대응

<최> 여기서 상수를 곱해준다는 것의 의미는 첫째, 단위를, 즉 우리가 기존에 시간이라고 이해하고 있는 것을 거리와 다름이 없는 것으로 가정하기 위해서 혹은 그렇게 이해하기 위해서 수학적으로도 단위를 맞춰주기위한 기술적인 이유이다. 둘째는 우리가 시간과 공간을 같은 성격의 것이라고 놓았을 때 수학적으로 이미 마련된 것 중에 복소수라고 하는 일단의 질서가 잘 맞아들어가기 때문에 시간이라고 하는 것을 허수축에 관련된 것에 부여해주는 것이다. 이렇게 두 가지의 의미로 정리하면 될까?

- 그렇다. 그래서 i와 c가 k로 되는 것이다. 이것이 참 놀라운 발견이다. 거리(공간 단위)로 만들어지는 3차원은 아무 문제가 없다. 그런데 시간은 전혀 다르다. 그런데 그 시간이 허수축에 딱 들어가게 되어 있다. 그러니까 신이 우주의 시간, 공간을 창조하셨다면 묘하게 수학의 실수축과 허수축에 매칭이 되도록 만들었다, 이런 얘기다.

1.4. 시공간을 4차원으로 보기로 하고 복소수 공간을 채택해서 시간을 허수축에 놓으니 잘 맞더라?

<최> 아인슈타인의 과정은 복잡하다고 말씀하셨다. 그런데 처음부터 우리가 4차원이라고 가정하고 이렇게 생각해볼 수 있을까? 우리가 기존에 공간을 3차원으로 보고 시간을 또 다른 1차원이라고 생각하는 것에 불만을 가지고, 누군가가 나는 달리 보고 싶다, 나는 4차원으로 보련다 하고서는, 일단은 수학적으로는 생각 안하고 그냥 단위만 맞춰서 모든 차원이 거리의 단위를 가지도록 한다, 그렇게 했을 때 우리가 경험하는 물리 세계와 가장 잘 맞는 몇 가지 현상들과 가정들을 맞춰보았을 때, 시공간이 4차원을 이룬다는 것은 수학적으로 시간을 허수축에 놓는 복소수 공간과 매칭을 시키는 것이 우리 현상을 4차원으로 보는 것과 제일 잘 맞더라, 그래서 나는 복소수 공간을 채택하기로 한다, 그리고 그것을 위해서 시간에 곱하는 상수에 허수의 성격을 부여하겠다, 이렇게 볼 수 있을까?

- 120년 정도 전에 그런 생각을 했으면 놀라운 거지, 아인슈타인보다 앞서는 거다. 그런데 아인슈타인 이전에는 그런 생각을 한 사람이 없다. 할 수 있는 생각인데도 불구하고 그런 생각을 한 사람이 없다. 아인슈타인이 그것 아닌 방법으로, 아까 잠깐 언급했지만 엉뚱한 가정 두 가지(책 p.170 참조)를 통해서 결과적으로는 거기에 해당하는 것을 만들어놓았고, 민코프스키가 보니까 아, 이게 4차원이다!하고 차후에 알아낸 것이다.
- 본래는 4차원이라 생각하고 할 수 있다. 아주 뛰어난, 아인슈타인을 능가하는 천재적인 사람이 있었다면, 시간-공간이라는 것이 가지는 어떤 특별한 관계 구조가 있을 것 아니냐고 생각했을 수 있다. 공간이 3차원이라는 건 뭐 인정하고, 시간도 거기에 또 하나의 차원이 돼서 4차원이 되면 더 재밌겠다.
- 그런데 그냥은 아무리 해도 안 되니까 허수와 실수와 i만큼 차이가 있는 가우스 2차원이 있으니 그걸로 해보자. 실수에서 나타나지 않는 것은 허수로 해결이 된다. 그러면 나머지 한 문제는, 기왕에 만든 시간 단위와 기왕에 만든 거리 단위를 매칭하자. 매칭하는 상수를 c라고 놓자, 그렇게 하면 딱 끝나는 것이다.

1.5. 복소수 공간의 시공간 4차원은 '실재'인가?

<최> 조금 질문이 왔다 갔다 하는 것 같은데, 저한테는 중요한 질문이라 한 가지만 더 여쭤보겠다. 이 책에 보면 가우스 전후에 복소수를 개발하던 시기에 수학자들이 허수를 imaginary number라고 했다. 그 정도로 허수는 수학에서 나온 개념이기는 하지만 실재와 매칭을 시킬 수 있는 성격을 너무도 가지고 있지 않기 때문에, 그냥 상상 속의 숫자라고 했던 것 같다. 상상은 얼마든지 할 수 있으니까, 수학 안에서는 뭐 그러자라고 용인이 될 수 있었을 것 같다.

그런데 우리의 실재 세계와 가장 잘 매칭이 되는 수학적인 개념과 질서 체계를 매칭시켰을 때, 시공간 4

차원과 소위 imaginary number라는 허수를 포함하는 복소수 체계가 잘 매칭이 되었다는 것이다. 그러면 심지어 수학 안에서 real이 아닌 imaginary라는 이름을 가진 수를 동원해서, 4차원이라고 우리가 이해한 물리 세계의 실재성은 어떻게 이해해야 할까?

- 그러니까 이제는 imaginary라는 말을 빼야지. 허수를 만들었던 그때는 허수축이 어떤 물리적인 것에도 대응이 안 됐다, 수학적으로만 의미가 있었다. 왜냐하면 제곱을 해서 −1이 되는 숫자가 있느냐, 봤더니 허수축밖에 없는 거야. 수학적으로는 있어야되는데, 실제로는 그 허수축을 연결시킬 방법이 없어서, 이것은 수학적으로 상상은 할 수 있지만 현실 세계와는 무관하다고 해서, 허수 imaginary number라고 했다.
- 그런데 이게 바로 시간이더라는 것이다. 이게 얼마나 놀라운 일이냐. 실수축이 거리, 공간이라고 치면 허수축은 바로 시간이다. 시간은 현실 세계에 있는 건데 왜 imaginary냐? 그래서 지금은 말하자면 물리를 통해서 허수가 '허'수가 아닌 게 됐다. 또 하나의 물리적으로 의미가 있는 수가 됐다. 그런데 그 허수의 물리가 실수를 공간축이라고 할 때 시간축이라는 것이다. 얼마나 재밌는 거냐 말이다. 그런 것이 물리학을 통해서 이루어졌다.

1.6. 도리어 시공간 4차원 이론으로 복소수의 실재성이 드러난 것?

<최> 그러면 이제 역으로 복소수의 실재성이 4차원 시공간 개념과 설명으로 거기에 수학적인 것에 다시 의미 부여가 된 것인가? imaginary가 아니다?

- 그렇다. 그리고 양자역학에서도 많이 쓴다. 이제는 정말 허수라고 하는 것을, 아무 의미도 없는 상상 속에서 나온 수학이라고 안본다. 그러니까 참 재밌는 것이, 우리가 상상으로 만들어놓은 그것이 어떻게 현실에 맞는냐? 항상 과학자들이 감탄하는 것이다. 자연은 참 오묘하다는 얘기가 그런 데서 나오는 것이다.

<최> 흔히 뭐 없었으면 어쩔뻔 했냐 이런 말이 있는데, 복소수 없었으면 어쩔뻔 했나 싶다.

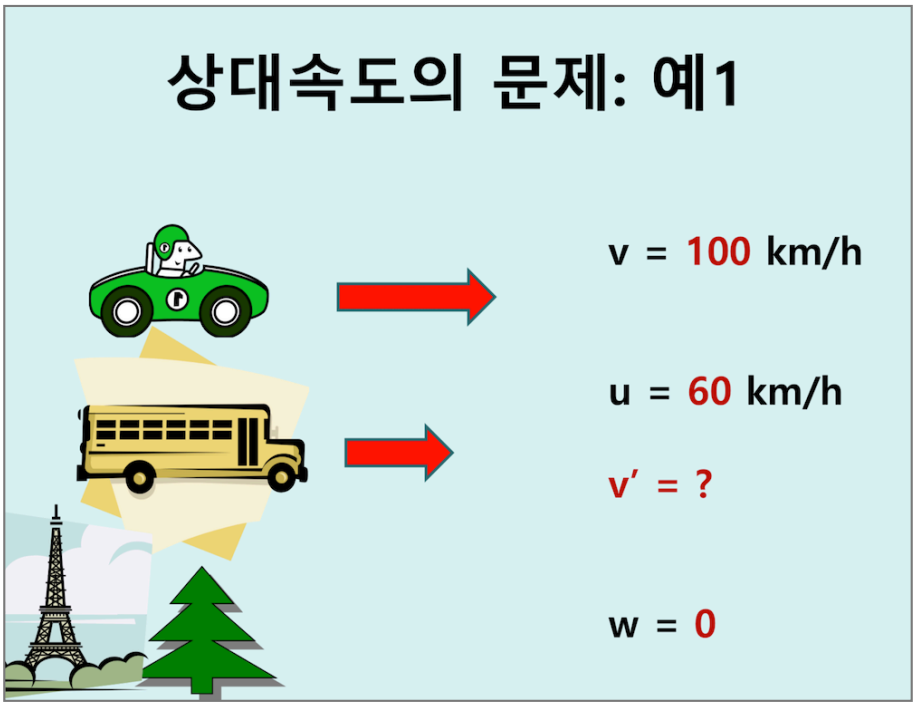
- 그런데 참 재밌는 것, 수학이 앞선다. 물론 같이 가는 수도 있고 물리를 하다가 만드는 수도 있지만. 가우스(Carl Friedrich Gauss. 1777−1855)가 이미 18, 19세기에 했는데[2] 20세기에 와서 비로소 아, 이게 허수가 '허'수가 아니다, 이렇게 된 것이다.

[2] 대담 중에는 가우스를 17세기 사람으로 잘못 알고 얘기를 나눴습니다. 녹취록에서 정정합니다.

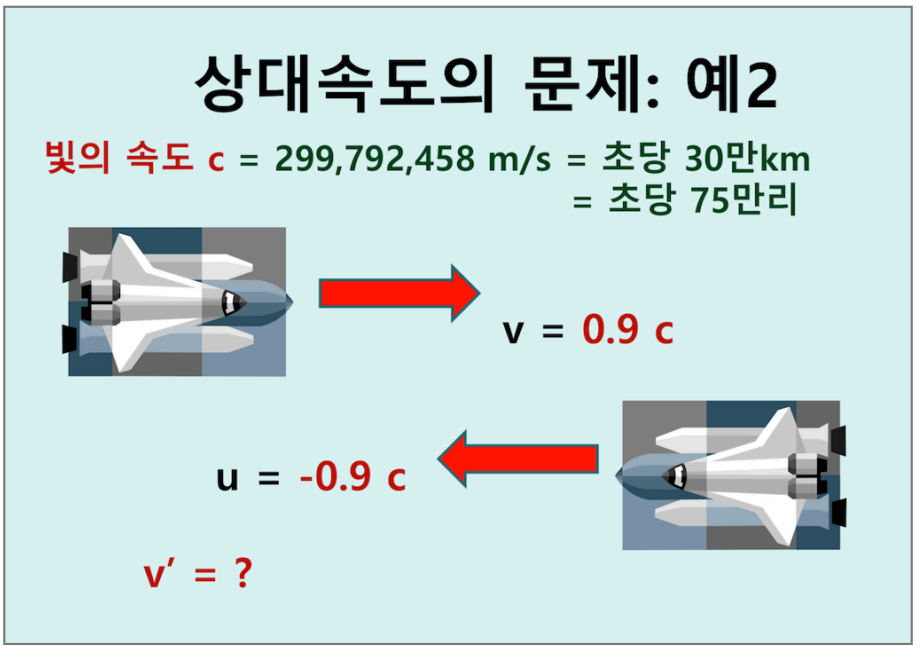
2. 4차원 시공간에서의 상대 속도 문제

2.1. 시간과 공간이 2차원을 이룰 때 상대방의 속도는 어떻게 보이는가?

<최> 이제 다룰 문제는 우리가 기존에 아는 상대속도의 문제가 어떻게 풀리느냐하는 것이다. 두 개의 예를 들고 있는데, 하나는 일상 세계에서의 문제(슬라이드 8), 또 하나는 우주 스케일의 사건이다(슬라이드 9).



[슬라이드 8] 상대속도의 문제: 예 1

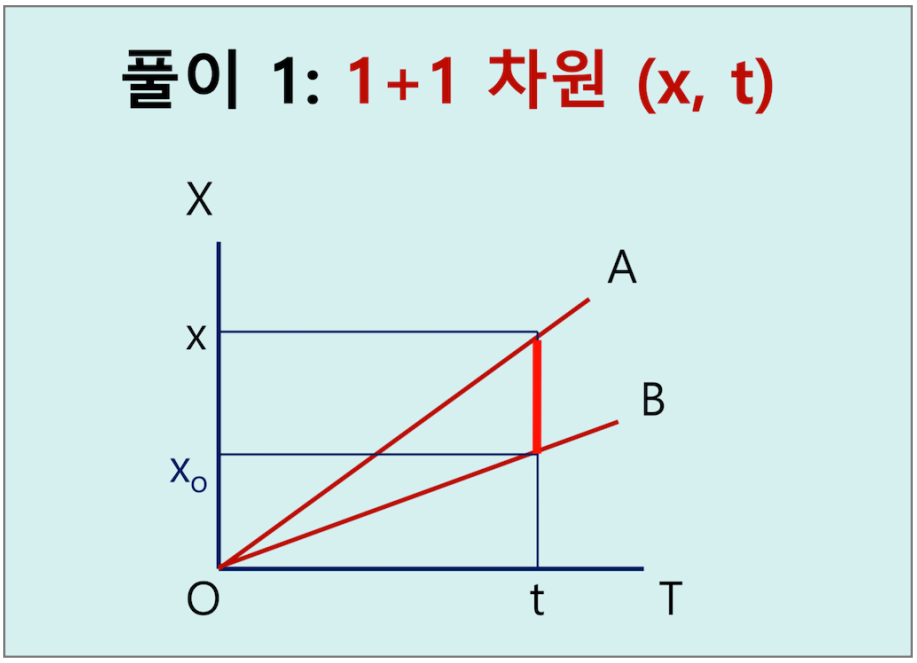


[슬라이드 9] 상대속도의 문제: 예 2

<최> 첫 번째 것은(슬라이드 8) 우리가 고속도로에서 늘 경험하는 사건이다. 추월선으로 100km로 가는 차가 있고 주행선으로는 60km로 가는 차가 있다고 할 때, 톨게이트에서 둘을 보면 하나는 100km로 가고 하나는 60km로 가는 것을 보일 것이다. 그런데 주행선으로 가는 차가 추월선에서 100km로 앞질러 가는 차를 보면 그 차의 속도가 얼마로 보일 것인가하는 문제이다.

두 번째 문제(슬라이드 9)는 조금 더 심각하게, 거의 광속의 90%의 속도로 가는 두 개의 우주선이 마주보면서 날아가는 경우이다. 나는 (등속으로 가고 있기 때문에) 가고 있는지 모르고 우리 우주선은 그냥 서있다고 느낀다고 할 때 저쪽에서 나를 향해 달려오는 저 우주선의 속도는 얼마로 보이겠는가? 반대로는 또 어떻게 되는가? 이런 문제이다.

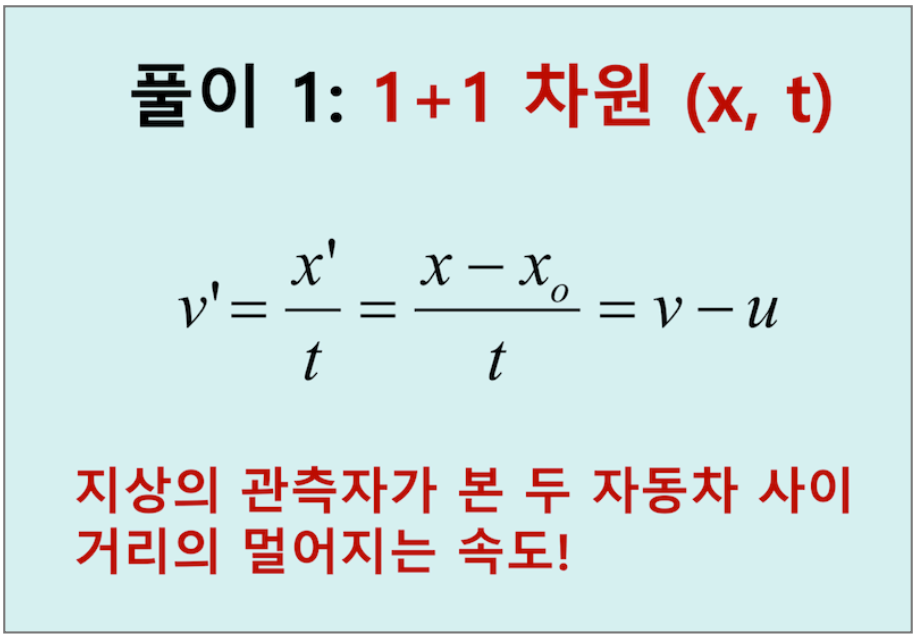
이 두 가지 문제가 기존의 3+1차원에서 풀면 어떻게 풀리고, 4차원에서는 어떻게 풀리는가를 선생님께서 설명해주셨다.



[슬라이드 11] 풀이 1: 1+1 차원 (x, t)

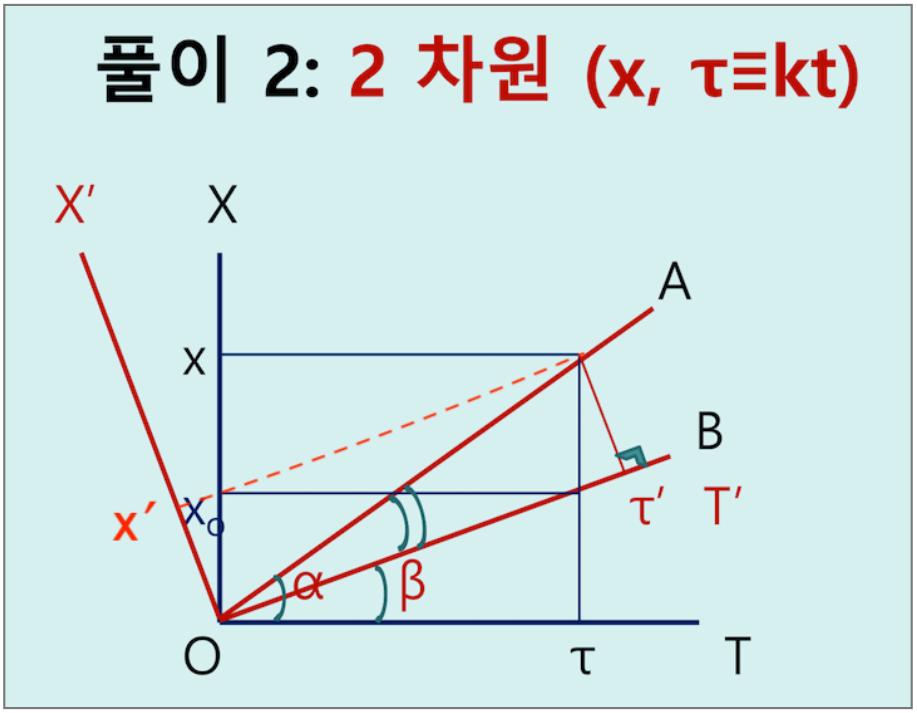
<최> 먼저 일상 세계에서 볼 수 있는 자동차 문제를 먼저 보겠다. 슬라이드 11은 시공간 1+1차원 그림이다. 여기서 세로축은 공간을 나타내는 한 차원이고(3+1차원에서 공간을 나타내는 3개의 차원을 하나로 축소시켜 단순화 한 것), 가로축은 시간을 나타내는 한 차원이다. 60km로 뒤따라가는 차 B에서 100km로 가는 차 A를 본 속도는 A선과 B선의 차이(t 지점의 빨강색 세로선)만큼일 뿐이다?

- A와 B는 처음에 같은 위치 O에 있었다. 시간이 t만큼 경과하는 동안 빨강색 세로선만큼 멀어졌다. 그러니까 B에서 봤을 때 A의 속도는 빨강색 세로선만큼의 거리를 시간 t로 나눈 것, 즉 $\frac{x - x_0}{t}$ 이다.



[슬라이드 12] 풀이 1: 1+1 차원 (x, t)

- 예를 들어 t가 1시간, 즉 두 차가 출발한지 한 시간이 지났다고 한다면 A는 100km, B는 60km만큼의 거리를 갔을 것이므로 거리 차이 $x - x_0$는 40km가 된다. 따라서 B에서는 A가 $\frac{40km}{1hr}$, 즉 시속 40킬로미터로 가는 것으로 보인다,하는 생각이 (상식적으로 생각하면) 아주 당연한 것 같다. 깊이 생각해 보지도 않고 당연하다, 전혀 흠잡을 데가 없다고 생각하는데 흠을 잡아보자. 이제 4차원(1+1차원이 아니라 시공간 2차원)으로 보면 어떻게 되나?



[슬라이드 13] 풀이 2: 2차원 (그림)

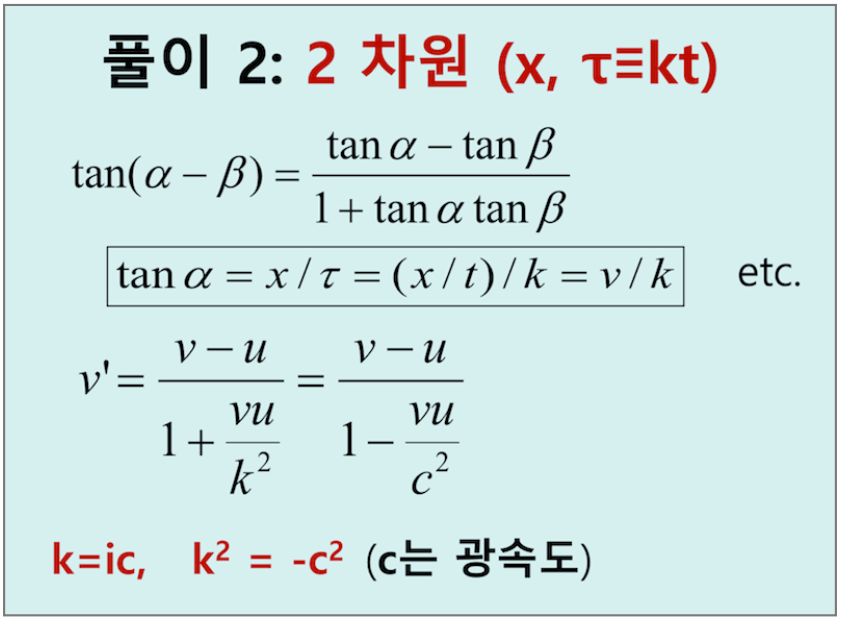
<최> 슬라이드 13에서, 멈춰 있는 사람에게는 B는 60km로 가는 차, A는 100km로 가는 차로 보인다. 그런데 더 느리게 가는 차 B가 자신은 움직이는지 모르고 정지해있다고 착각하고 앞의 차 A를 보았을 때는 어떻게 보이느냐하는 문제가 된다.

앞에서 1+1차원에서는 정지해있는 관측자가 보는 것이나 차 B에서 보는 것이나 동일한데, 2차원에서는 (거리와 시간이) 동등한 차원이기 때문에 B가 기준축이 되어 파악될 수 있다. 그리고 B에서 본 앞 차 A의 속도는 $\frac{x-x_0}{\tau}$가 아니라 $\frac{x'}{\tau'}$가 된다.

- 그러니까 시간과 공간이 합쳐서 x와 τ가 대등한 것이 되면... 지금 **T**축과 B축이 완전히 대등하다. 그렇기 때문에 B축을 기준으로 속도를 생각하는 것과, **T**축에서 속도를 생각하는 것은 똑같은 방식으로 해야 한다. B축을 기준으로 한다면 τ'에서 수직으로 올라간 거리(x')를 계산해야 한다. B가 차를 타고 간 시간 τ' 동안 A가 간 거리 x'를 봐야한다는 것이다.
- 그렇게 보면 B에서 본 A의 속도는 B와 A의 사이각 $\alpha-\beta$에 대한 탄젠트 값, $\tan(\alpha-\beta)=\frac{x'}{\tau'}$가 된다. 따라서 앞에서 본 사다리의 기울기 관계와 똑같다. 2차원일 경우에는 사다리 기울기 계산법과 같아야 한다.
- 이렇게 보면, 아까 했던 1+1차원의 계산은 억지다. 실제로는 시간이 τ'만큼 갔는데 τ만큼 간 걸로 생각을 하고, 거리는 x'이 아니라 $x-x_0$만큼 간 걸로 잘못 생각을 했다. 시간이라는 것은 일정하게 흐르기 때문에 모든 시간은 **T**축을 기준으로 해야한다고 딱 못을 박아놨던 것이다. 그러니까 X 좌표축을 떠나지 않고 보면 이렇게 된다.
- 그런데 B축과 **T**축이 대등하니까 서로 대등한 자격으로 보고 똑같은 방식으로 보려면, 아까 했던 사다리 방식(슬라이드 4)으로 해야 한다. 그러니까 4차원(여기서는 공간 3차원을 하나의 차원으로 단순화시켜서 시공간 2차원으로 보고 설명하고 있다는 점에 유의해주세요)으로 보면 사다리 계산법을 써야 한다.
- 반면에 여전히 시간축이 공간축(3차원)과 독립이다,하면 X-**T**좌표축 외에 좌표축을 돌리는 것은 무의미해진다. 이 경우에는 자동차가 움직일뿐이지 좌표축을 돌린 게 아니다. 좌표축은 여전히 **T**로 하고 이 좌표축에 대해서만 생각을 하니까 거리 차이가 $x-x_0$가 나오게 된다. 그것이 우리가 지금까지 상식적으로 (1+1차원으로) 생각했던 것이다.
- 그런데 2차원으로 생각하면 어떻게 되느냐. 아까 결과가 이렇게 나온다(슬라이드 14). 여기에 왜 k가 들어갔나 하면, t를 써야하기 때문에, $\tan\alpha$를 계산하면서 τ대신에 kt를 넣어서 그렇다($\tau\equiv kt$이므로).

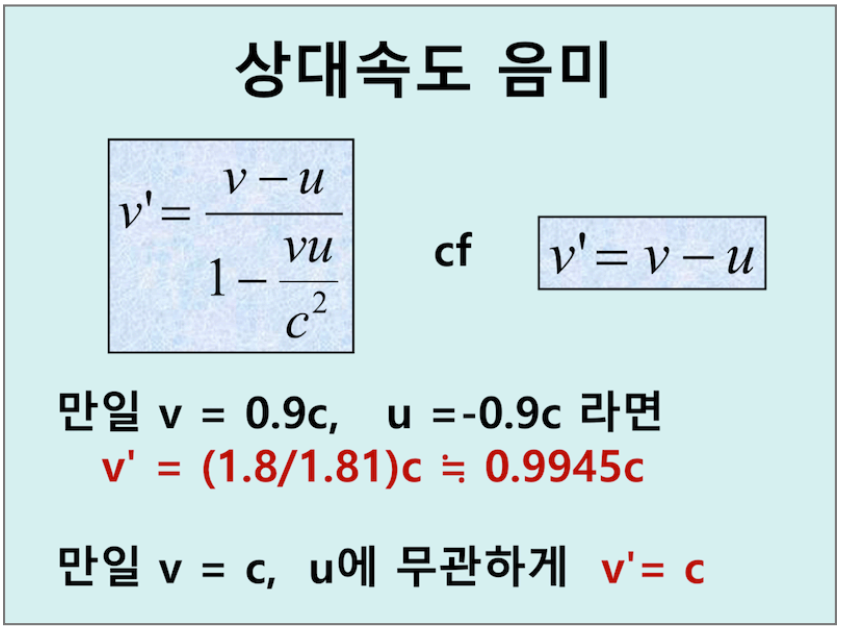
<최> 슬라이드 14의 풀이에서 식을 t에 대해서 고쳐준 이유는, 우리가 아는 시간과 관련된 숫자는 t밖에 없어서 그런가?

- 그렇다. 형식적으로는 $\tau \equiv kt$ 이렇게 대등한 관계이지만, 현실의 시간은 t로 보는 거니까 바꾸려면 k 만큼 보정을 해줘야 한다. 그래서 다 계산을 하면 마지막에 k^2이 붙어나온다(슬라이드 14). 그런데, 아까 얘기했지만 $k = ic$인데, i는 허수축에 해당한다는 뜻이고 c는 단위때문에 들어간다고 했다. 따라서 k^2은 $(ic)^2$이고 $(i)^2$은 -1이니까 $k^2 = -c^2$이 된다.



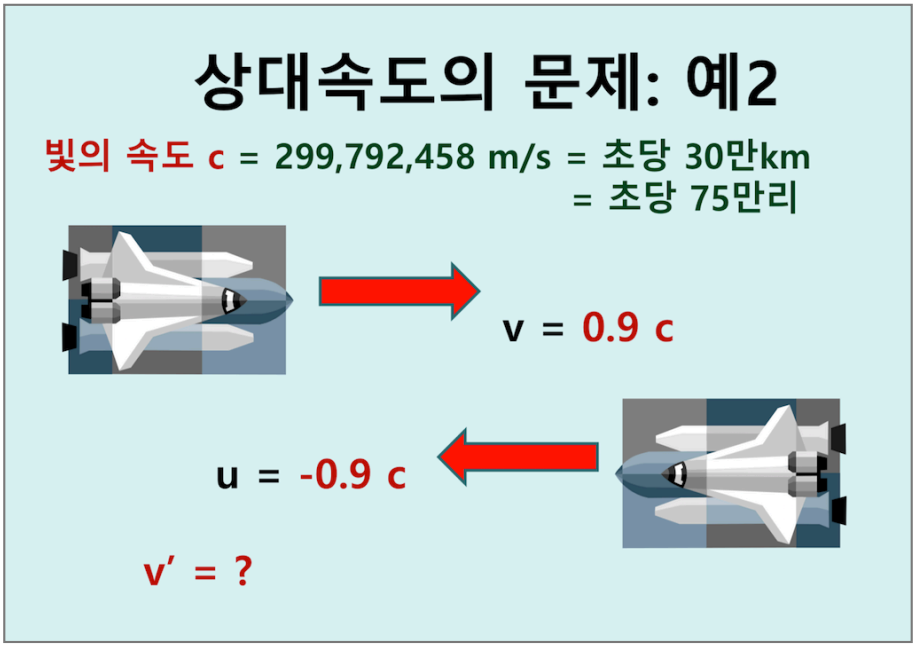
[슬라이드 14] 풀이 2: 2차원 (계산)

- 그래서 마지막에 $\frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}}$ 이 식이 나온다. 이게 굉장히 재밌는 식이다. 기존에는 $v-u$밖에 없다고 생각했는데, 분모에 $1-\frac{vu}{c^2}$가 붙어나온 것이다. 그런데 이게 얼마나 신기하냐, 한번 보자.



[슬라이드 15] 상대속도 음미

- 그래서 두 가지 답이 다 나온다. $v' = v - u$는 우리가 4차원 생각을 여전히 하지 않고, 시간은 독립적이고 공간도 시간과 무관하다는 기존의 사고방식을 쓰면 나오는 식이다.
- 반면에 시간과 공간이 대등한 2차원을 이룬다고 생각하면 사다리 공식에 해당하는 값 $\dfrac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}}$ 이 나온다. 그러면 아까 시속 100km와 60km짜리 자동차의 경우에는 차이가 없다. 왜냐하면 v, u에 100km/h, 60km/h 넣어봤자 c가 워낙 크기 때문에 $\dfrac{100 \times 60}{c^2}$의 값은 거의 0이다. 그래서 분모가 1이 되니까 결과적으로 $v' = v - u$ 이렇게 된다. 우리 상식에는 맞다.



[슬라이드 9] 상대속도의 문제: 예 2

- 그런데 로켓의 경우(슬라이드 15, 9)는 각각 땅에서 봤을 때의 속도는 $0.9c$이다. 그런데 속도 u인 로켓을 기준으로 하면 분자 $v - u$는 $0.9c-(-0.9c)=1.8c$가 되고, 분모 $1 - \dfrac{vu}{c^2}$는 $1-\dfrac{0.9c \times (-0.9c)}{c^2}$ $=1+0.81=1.81$이 된다. 1.8을 1.81로 나누면 1보다 작게 될 수 밖에 없다. 그래서 계산해보면 $v' = \dfrac{1.8c}{1.81} \fallingdotseq 0.9945c$가 돼서, 광속에 아주 가깝기는 해도 광속보다는 작다.
- 그러니까 거의 광속에 가까운 것 두 개가 마주 보고 왔는데도 상대속도가 광속보다 작다. 그러면 $0.99c$로 해보면 어떻게 되느냐? 광속을 넘을 것인가? 해보면 또 안 넘는다. 아무리 소수점 아래에 9가 여러 개 있어도 광속을 넘지 않는다. 이 방법으로 할 때 아무리 빠른 것끼리 해봐도 광속을 넘어가지 않는다는 희한한 결과가 나온다.
- 더 재밌는 게 바로 이건데, v와 u 중에서 v를 c라고 두는 경우다. 만약에 상대편이 c의 속도로 나를 향해서 오고 나(u)는 광속의 90%로 가고 있다고 해보자. 혹은 내가 광속의 99%, 즉 $0.99c$의 속도로 빛

을 따라가면서 본다고 해보자. 그러면 어떻게 되느냐. 어떤 방법을 써도 u에 무관하게 v'는 c가 된다. 금방 계산이 된다.

- 그러니까 이 중에 하나가 v이고, u는 c만 아니면 된다. u가 c가 되면 $\frac{0}{0}$이 되어서 이 식으로 결정이 안 되기 때문에 이런 경우는 제외한다. 거의 c, 즉 0.99999...해서 9가 100개가 되더라도 u는 상쇄가 돼서 v'는 c가 된다.
- 이 이야기는 아인슈타인이 가정한 것이다. 광속도는 아무리 빨리 가도, 어디서 봐도 항상 c라는 것이다. 이 터무니 없는 가정이 이 식 $\frac{v-u}{1-\frac{vu}{c^2}}$으로 증명되는 것이다. 이 식이 나오기 전에, 증명되기 전에 아인슈타인의 가정을 믿어라, 하면 못 믿는다. 왜냐하면 우리는 $v' = v - u$라고 생각하고 있을 때였기 때문이다.

2.2. 상수 c의 값은 어떻게 찾아내나?

<황> 지금까지 수식이 흘러가는 과정에서, c가 광속이라고 생각 안 해도 이 식이 다 나온다는 말씀인가?

- 물론이다.

<황> 그리고 c가 광속인지 어떻게 알았나?

- 결국 여기서 c의 값은 자연이 말해주는 것이다. 우리가 c를 그렇게 놓았는데. 우리가 놓고 싶은대로 놓은 게 아니다. 우리가 과거에 시간 단위와 공간 단위를 정해 놓고, 자연한테 묻는 것이다. 우리의 현실 세계에서 시간과 공간 단위가 같아지려면 우리가 놓은 그 단위 상에서 그 값을 어떤 값으로 놓아야 그 값이 현실 세계와 맞게 되는가,하는 것이다.

<황> 계산을 한 것인가? 실험을 해서 구했나?

- 자연한테 물어보는 것이다. 자연만이 대답하는 것이다. 자연에서 측정을 해보면... '실험'이라는 말을 내가 피하려고 하는 것인데. 빛을 재든 무엇을 재든, 그것이 자연에서 무엇에 해당되는 것인지 우리가 찾아내면 그 값이 우리가 알고 있는 광속이다.

<황> 그러면 아인슈타인은 광속을 일단 가정으로 놓은 것이고, 실제로 스스로 측정을 해보거나 그러지는 않은 건가?

- 그 당시에 벌써 광속은 많은 사람들이 측정을 했다. 그런데 이 이론 속에서는 그 광속과는 무관하게, 우리는 자연계 모든 것을 살펴보니 이 c값은 우리가 알고 있는 광속에 해당하는 것을 집어넣을 때 자연에 맞더라, 이렇게 보면 된다. 논리적으로 그렇다. 빛과 관계없이 이 c를 다른 식으로 찾아도 된다.

어떻게 찾든 간에 찾아보면, 자연은 이것이 우리가 현재 알고 있는 c 값에 해당하는 것으로 연결이 되더라하는 것이다.

2.3. 이론이 먼저 나오고 상수값이 나중에 밝혀진 역사적 사례가 있나?

<최> 여기에서 보면 논리적인 귀결은 역사적으로 달랐는데, 실제로 이러이러해서 상수 얼마를 가진 이런 것으로 자연이 서술될 수 있다, 상수 값은 관측값에 의해서 정해지겠지만 이러한 상수가 있어야한다는 이론이 먼저 나오고, 그 뒤에 관측이나 여러가지 방법을 통해서 상수값이 결정된 그런 사례도 있을까?

- 역사적으로는 잘 없다. 역사적으로 그걸 다 모르고 상수를 놓기 마련이다. 이론적으로 다시 체계화해서 다시 그 관점에서 보면, 지금 이 경우처럼 딱 맞는 것을 놓는데 실제로 그게 뭐냐하고 나중에 매칭하는 형식을 취하게 된다. 역사적으로 이미 다 알고 있었던 것이다.

<최> 선생님 책(p.169)에 보면 **"여기서 c라는 상수는 빛이라고 하는 어떤 특정 실체의 속도를 나타내는 값이라기보다 시간과 공간을 별개의 물리량으로 보고 각각 독립적으로 단위를 정했기에 나타나는 불가피한 조정 치에 해당한다."**라고 되어 있다.

그 다음에 이어서 또 재미있는 얘기가 있는데, **"만일 시간과 공간이 4차원 물리량의 서로 다른 성분들임을 미리 알았더라면 이들 단위를 통일했을 것이고, 따라서 상수 c는 당연히 1이라는 값을 가지게 된다."** 이렇게 쓰셨다.

이게 잘 상상이 안되는데, 만일 알았더라면 거리의 단위와 시간의 단위가 하나의 단위로 통일됐을 때 상수 c라는 것이 불필요했을 것이다, 우리는 결과적으로 c라는 30만 km/s라는 정도의 상수 값이 붙어 있는 것으로 알고 있는데 미리 알았다면 그런 불필요한 상수가 없는 단위로 통일했을 것이다,라는 얘기다. 그러면 지금이라도 역사적인 잔재들을 싹 걷어내고 물리학을 다시 쓰는 게 가능할까?

- 그렇다. 입자물리학에서는 c를 아예 1로 놓는다.

<최> 그러면 거리 단위는 어떻게 되나? 차이가 엄청나게 클 것 같은데...

- 같은 단위를 쓰는 것이다. 100억 분의 1을 무엇으로 한다, 이렇게 하면 된다. 중간치는 얼마든지 정할 수 있으니까. km와 m는 근본적으로 다른 게 아니니까, 1000m는 너무 크니 1km로 놓자, 이런 식으로 조정하면 된다. 그냥 통일해서 쓸 수 있다. 우리한테는 좀 불편하지만. 우리는 1초라는 것이 아주 작은 시간인데, 빛은 워낙 멀리 간다.
- 초를 시간과 거리의 단위로 통일한다면 시간 단위로는 우리한테는 편리하지만 공간 단위로는 빛이 1초 동안 가는 거리 30만 km를 기본 단위로 삼아야 한다. 그러니까 좀 불편하지. 그렇지만 그건 그냥 편리, 불편의 문제이고, 우리 일상에 맞도록 억 분의 1을 무엇으로 정하고 조 분의 1을 얼마로 정하고, 이런 식으로 조정해서 얼마든지 쓸 수 있다.

<최> 이 질문도 조금 벗어나는 질문인 것 같기는 한데, 선생님께서 쭉 말씀해주시는 내용을 들어보면 역사적으로 잘 몰랐기 때문에 지금 불필요한 것들이 덧붙은 게 많다. 가령 전류의 부호도 사실은 전자의 흐름과 거꾸로 되어 있다는 말씀도 하셨고, 여기서는 이것도 사실은 알고 보니 그럴 필요가 없었던 것인데 역사적으로 이렇게 됐다, 볼츠만 상수도 그렇다, 그런 것들이 있다.

그러면 물리학자들이 한 자리에 모두 모여서 과거의 잔재들을 싹 다 걷어내고 물리학을 깔끔하게 새로 정리하는 그런 작업을 가상적으로라도 해볼 수 있을까?

- 그렇다. 워낙 지금까지 해놓은 게 많아서 정리하기가 좀 힘들다. 그렇지만 지금이라도 해놓으면 훨씬 깔끔하다. 많은 상수들을 제거할 수 있다. 곧 얘기하겠지만, 양자역학의 플랑크 상수 h, 그것도 (정리하면) 필요없다, 그냥 1로 놓으면 된다. 볼츠만 상수도 필요없다.
- 몰랐기 때문에 만들어진 것들이 많이 있다. 왜 이 상수값이 이러게 되느냐하는 것은 나중에 알고 보면, 우리가 몰랐기 때문에 같은 것인데도 서로 다른 단위로 정해놓고 하다가, 나중에 매치시켜놓고 보니까 단위를 조정해줘야하는 상황이 되는 것이다. 그렇게 해서 많은 중요한 상수들이 생겨났다.
- 그러니까 우리가 이해가 깊어질수록 상수가 줄어든다. 다 연결되니까. 연결이 안 됐으면 다 따로따로지만, 연결이 돼서 하나가 되면, 예를 들어 통일이 되면 두 나라의 화폐 단위를 따로 쓸 필요가 없다. 그것과 비슷하다.

끝.

녹취: 황승미 (녹색아카데미)

* 알림: 본문의 슬라이드 자료는 녹색아카데미 웹사이트를 참고해주세요.
* 댓글이나 의견은 녹색아카데미 페이스북 그룹, 트위터, 인스타그램 등을 이용해주시면 감사하겠습니다. 녹색아카데미 웹사이트의 자연철학 세미나 게시판과 공부모임 게시판에서도 의견이나 질문을 남길 수 있습니다.